Bewertung von Finanzderivaten

am Beispiel von LIBOR Zinsmodellen

Christian Fries
31.10.2003
www.christian-fries.de/finmath
(Version 1.1 - Revision 2 (31.10.2003) - First Version 24.07.2003)

Modellierung

Modellierung (1/3)

Finanzprodukt:

Vertraglich festgelegte Zahlungsströme in Abhängigkeit von Ereignissen.

Modellierung:

Modellierung eines Zahlungsstromes zu festem Zeitpunkt $T \geq 0$ als *Zufallsvariable*

$$X : \Omega \to \mathrm{I\!R}.$$

Modellierung des Wertes eines Finanzproduktes als *stochastischer Prozess*

$$S : [0, \infty) \times \Omega \to \mathrm{I\!R}$$

$S(\omega)$ mit $\omega \epsilon \Omega$ ist als Abbildung von $[0, \infty) \to \mathrm{I\!R}$ der *Pfad* von S im Zustand ω.

Alle Zufallsvariablen seien über dem selben *Messraum* $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert.

$$\omega \epsilon \Omega \quad \leftrightarrow \quad \text{pfad / historie}$$

Information wird modelliert durch die *Filtration*: Familie von σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ ($\subset \mathcal{F}_s$, $t < s$), deren Elemente die Ereignisse sind, welche in t bekannten sein können $\Rightarrow$ X muß $\mathcal{F}_T$ meßbar sein.

Modellierung (2/3): Brownsche Bewegung

Prototyp eines stochastischen Prozesses - Baustein für Itô Prozesse:

Brownsche Bewegung: W

- $W(t)$ definiert über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- $W(0) = 0$.
- $W(t)$ Normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{t}$.
- $W(t_2) - W(t_1)$ Normalverteilt mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sqrt{t_2 - t_1}$.
- $W(\cdot, \omega)$ stetige (aber nirgends differenzierbare) Funktion $[0, \infty) \rightarrow$ IR (P-fast sicher).

Konstruktion einer zeit-diskreten Approximation:

$$\tilde{W}(t_k) := \sum_{i=0}^{k-1} \Delta W(t_i) \quad (0 = t_0 < t_1 < \ldots),$$

wobei

$$\tilde{W}(t_0) := 0 \quad , \quad \Delta W(t_i) = (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t_{i+1} - t_i}) \text{ (i.i.d).}$$

Infinitesimale Notation:

$$W(t) =: \int_0^t \mathrm{d}W(\tau).$$

→ Theory of stochastic integration (integration with stochastic process as integrator).

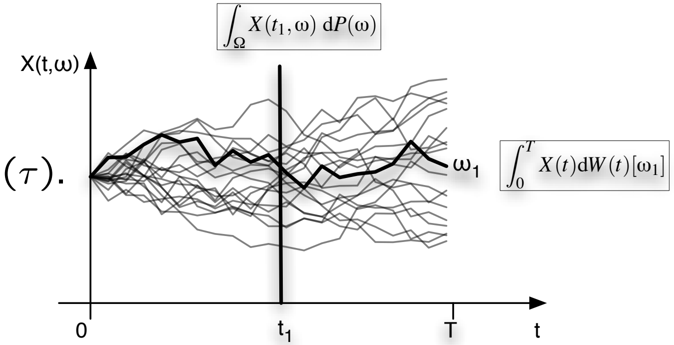
Modellierung (3/3): Itô-Prozesse

Wir beschränken uns zunächst auf die Modellierung mittels *Ito Prozessen*:

Stochastic Differential Equation:

$$\mathrm{d}S = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W,$$

wobei μ, σ Konstanten, Funktionen in t, oder gar selbst ($\mathcal{F}_t$-adaptierte) stochastische Prozesse oder stochastische Prozesse der Form $\mu(t, S(t))$, $\sigma(t, S(t))$ sind.



Integral Form:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu(\tau, S(\tau))\, \mathrm{d}\tau \; + \; \int_0^t \sigma(\tau, S(\tau)) \mathrm{d}W(\tau).$$

Euler Discretization:

$$\underbrace{\Delta\tilde{S}(t_i)}_{\tilde{S}(t_{i+1}) - \tilde{S}(t_i)} = \mu(t_i, \tilde{S}(t_i)) \cdot \underbrace{\Delta t_i}_{t_{i+1} - t_i} + \sigma(t_i, \tilde{S}(t_i)) \cdot \underbrace{\Delta W_i}_{\sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t_i})} \qquad \text{mit } \tilde{S}(0) = S(0),$$

wobei $\{\tilde{S}(t_i) \mid 0 = t_0 < t_1 < \ldots\}$ die *Euler Diskretisierung* von $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ ist.

Risikoneutrale Bewertung

Risikoneutrale Bewertung (1/5)

Produkt A:
Zum Zeitpunkt $T_2 > 0$ wird die Regenmenge $R(T_2)$ (in mm) an einer definierten Stelle gemessen und der Euro-Betrag

$$A(T_2) := (R(T_2) - X) \cdot \frac{€}{mm}$$

ausgezahlt. $R(T_2)$ (somit $A(T_2)$) ist im allgemeinen stochastisch. – Was bestimmt den Wert $A(T_1)$ dieses Vertrages in T_1?

Produkt B:
Zum Zeitpunkt T_2 wird der Kurs $S(T_2)$ der IBM Aktie (in €) festgestellt und der Euro-Betrag

$$B(T_2) := (S(T_2) - X)$$

ausgezahlt. – Was bestimmt den Wert $B(T_1)$ dieses Vertrages in T_1?

Replikation:
Die Auszahlung von Produkt B ist replizierbar durch in T_1 erwerbbare Produkte: Sei $P(T_2; T_1)$ die Auszahlung eines Kredites, der in T_2 durch die Zahlung von 1 getilgt werden muß. In T_1:

Kaufe Aktie $S(T_1)$ und nehme Kredit $X \cdot P(T_2; T_1)$ auf, der in T_2 mit X getilgt werden muß.

Wert in T_2: $S(T_2) - X \;=\; A(T_2)$

Wert in T_1: $S(T_1) - X \cdot P(T_2; T_1) \overset{!}{=} A(T_1)$

Risikoneutrale Bewertung (2/5)

Replikation ist (unter Voraussetzungen) möglich für beliebige Auszahlungsfunktionen $V(T_2)$, z.B.

- Option mit Strike K: $V(T_2) = \max(S(T_2) - K, 0)$

- Digital-Option mit Strike K: $V(T_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S(T_2) > K \\ 0 & \text{falls } S(T_2) < K \end{cases}$

- sofern man den stochastischen Prozess der unterliegenden Größen kennt.

Risikoneutrale Bewertung (3/5)

Replication Strategy – Discrete Time (T_1, T_2), Two Assets (S, B), Two States (ω_1, ω_2)

In T_2 existieren nur zwei disjunkte Ereignisse / Zustände ω_1 und ω_2. Gegeben sei $V(T_2, \omega_i)$, sowie zwei gehandelte Produkte S und B. Gesucht ist ein Portfolio $\alpha S + \beta B$, welches in T_2 den Wert von $V(T_2)$ repliziert. Sein Wert in T_1 bestimmt dann den Wert $V(T_1)$.

$$\alpha \cdot S(T_1) + \beta \cdot B(T_1) \quad \begin{cases} \alpha \cdot S(T_2;\omega_1) + \beta \cdot B(T_2;\omega_1) \overset{!}{=} V(T_2;\omega_1) \\[2em] \alpha \cdot S(T_2;\omega_2) + \beta \cdot B(T_2;\omega_2) \overset{!}{=} V(T_2;\omega_2) \end{cases}$$

Das Geleichungssystem rechter hand ist lösbar, falls

$$S(T_2;\omega_1) \cdot B(T_2;\omega_2) - S(T_2;\omega_2) \cdot B(T_2;\omega_1) \neq 0$$

d.h. $(B \neq 0)$
$$\frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} \neq \frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)}$$

Risikoneutrale Bewertung (4/5)

Wir betrachten nochmals

$$\alpha \cdot \frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} + \beta \cdot 1 \overset{!}{=} \frac{V(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)}$$

p

$$\alpha \cdot \frac{S(T_1)}{B(T_1)} + \beta \cdot 1$$

Replikationsportfolio ist unabhängig vom Wahrscheinlichkeitsmaß

$1-p$

$$\alpha \cdot \frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} + \beta \cdot 1 \overset{!}{=} \frac{V(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)}$$

Im Allgemeinen ist

$$\frac{V(T_1)}{B(T_1)} \neq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right) \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{S(T_1)}{B(T_1)} \neq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{S(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Ist sign $\left(\frac{S(T_2;\omega_2)}{B(T_2;\omega_2)} - \frac{S(T_1)}{B(T_1)}\right) \neq$ sign $\left(\frac{S(T_2;\omega_1)}{B(T_2;\omega_1)} - \frac{S(T_1)}{B(T_1)}\right)$ so existiert ein W'keitsmaß $\mathbb{Q}$ mit

$$\frac{S(T_1)}{B(T_1)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S(T_2)}{B(T_2)}\right) \qquad \text{und somit} \qquad \frac{V(T_1)}{B(T_1)} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right).$$

Das Maß $\mathbb{Q}$ wird als risikoneutrales Maß bzw. *equivalent martingale measure* bezeichnet. Es hängt nicht von V ab!

(Gilt nicht bei Betrachtung von $V(T_1) \overset{!}{=} \mathrm{E}(V(T_2))$ statt $\frac{V(T_1)}{B(T_1)} \overset{!}{=} \mathrm{E}\left(\frac{V(T_2)}{B(T_2)}\right)$).

Definition (Martingal): Ein stochastischer Prozess M_t heißt $\mathbb{P}$-Martingal, falls

i) $M_s = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \quad \forall s \leq t$ ii) $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}(|M_t|) < \infty \quad \forall t$

Change of measure theorem: Sei W_t eine $\mathbb{P}$-Brownsche Bewegung und γ_t ein $\{\mathcal{F}_t\}$-vorhersehbarer Prozess mit $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2)\right) < \infty$. Dann existiert ein Maß $\mathbb{Q}$, äquivalent zu $\mathbb{P}$, mit

i) $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t\right)$ ii) $\tilde{W}_t := W_t + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}s$ ist eine $\mathbb{Q}$-Brownsche Bewegung.

Martingal property for Ito processes: Sei X ein Ito-Prozess mit $\mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t$ mit $\mathrm{E}((\int_0^T \sigma_t^2 \mathrm{d}s)^{1/2}) < \infty$. Dann gilt

X ist ein Martingal $\Leftrightarrow$ X ist driftfrei, d.h. $\mu_t \equiv 0$.

Martingal representation theorem: Sei M_t, mit $\mathrm{d}M_t = \sigma_t \mathrm{d}W_t$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal und $\sigma_t > 0$ ($\mathbb{Q}$-f.s.). Dann existiert für jedes $\mathbb{Q}$-Martingal N_t ein vorhersehbarer Prozess ϕ_t mit

i) $N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}M_s$ ii) $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 \mathrm{d}t < \infty$ ($\mathbb{Q}$-f.s.) .

Zinsstrukturen

Zero-Coupon Bond: Grundlegendes Objekt. Zinsen werden als abgeleitete Größen interpretiert.

$$P(T_2) : [0, T_2] \times \Omega \mapsto \mathrm{I\!R}$$

$P(T_2; t) : \Omega \mapsto \mathrm{I\!R}$ (Zufallsvariable):
Wert einer garantierten Zahlung von 1 im Zeitpunkt T_2, gesehen im Zeitpunkt $t < T_2$.

Bemerkung: $P(T_2; T_2) = 1$

Forward-Rate:

$$\frac{P(T_1)}{P(T_2)} =: (1 + L(T_1, T_2) \cdot (T_2 - T_1)).$$

$L(T_1, T_2; t) : \Omega \mapsto \mathrm{I\!R}$ (Zufallsvariable):
Zinsrate einer Investition von 1 im Zeitpunkt T_1 mit Auszahlung in Zeitpunkt T_2, gesehen im Zeitpunkt $t \leq T_1$.

Black (1976) Model

for an option on the forward rate (aka Caplet)

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Option payoff:

$$\max\Big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\Big) \quad \text{in } T_{n+1},$$

where $L_n \cdot (T_{n+1} - T_n) := P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1$, i.e. L_n denotes the forward rate for the period $[T_n, T_{n+1}]$.

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W, \qquad \sigma = \text{const.}$$

Numeraire (good choice):

$$N(t) := P(T_{n+1}; t).$$

Drift:

$$L_n(t) = \frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot (P(T_n)/P(T_{n+1}) - 1) = \frac{1}{(T_{n+1} - T_n)} \cdot \frac{P(T_n) - P(T_{n+1})}{P(T_{n+1})}$$

$$= \boxed{\frac{\frac{1}{(T_{n+1}-T_n)} \cdot (P(T_n) - P(T_{n+1}))}{N}.}$$

N-relative price

Under the equivalent martingale measure Q^N, the N-relative prices are martingales (drift = 0)

Black (1976) Model for a Caplet (option of forward rate)

Model specification:

$$\frac{\mathrm{d}L_n(t)}{L_n(t)} = \sigma \mathrm{d}W, \qquad \text{under } \mathbb{Q}^N \text{, where } \sigma = \text{const.}, \; N(t) := P(T_{n+1};t) \quad \text{(Numeraire)}$$

Option value:

$$\begin{aligned} V(T_{n+1}) &= \max\Big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\Big) && \text{in } T_{n+1}. \\ V(T_n) &= \max\Big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\Big) \cdot P(T_{n+1};T_n) && \text{in } T_n. \end{aligned}$$

Universal Pricing Theorem:

$$\begin{aligned} \frac{V(0)}{N(0)} &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{V(T_n)}{N(T_n)}\right) \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\frac{\max((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0) \cdot \cancel{P(T_{n+1};T_n)}}{\cancel{P(T_{n+1};T_n)}}\right) \end{aligned}$$

Option value:

log normal distributed

$$V(0) = P(T_{n+1};0) \cdot \underbrace{\mathrm{E}^{\mathbb{Q}^N}\left(\max((\boxed{L_n(T_n)} - X), 0)\right)}_{L_n(0) \cdot \Phi\left(\frac{\ln(\frac{L_n(0)}{X}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}}\right) - X \cdot \Phi\left(\frac{\ln(\frac{L_n(0)}{X}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}}\right)} \cdot (T_{n+1} - T_n)$$

Under log-normal dynamics of the forward rate

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{L(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t \; + \; \sigma \mathrm{d}W, \qquad \sigma = \text{const.}$$

the price of a Caplet paying

$$V(T_{n+1}) = \max\Big((L_n(T_n) - X) \cdot (T_{n+1} - T_n), 0\Big) \qquad \text{in } T_{n+1}$$

is given by a Black Scholes type formula

$$V(0) = P(T_{n+1};0) \cdot \left[L_n(0) \cdot \Phi\left(\frac{\ln(\frac{L_n(0)}{X}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}}\right) - X \cdot \Phi\left(\frac{\ln(\frac{L_n(0)}{X}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T_n}{\sigma\sqrt{T_n}}\right)\right] \cdot (T_{n+1} - T_n)$$

LIBOR Market Model

aka BGM

Brace, Gatarek, Musiela; Sandmann, Sondermann; etc.

LIBOR Market Model

Modellspezifikation:

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{L_i} = \mu_i(t)\mathrm{d}t \; + \; \sigma_i(t)\mathrm{d}W_i \qquad \text{für } i = 0, \ldots, N-1,$$

Eigenschaften:

- Zeitabhängige Volatilität $\sigma_i(t)$
- Konsistente Modellierung von N Zinsraten L_i ($\rightarrow$ Zinskurve) bezüglich einem Numeraire / Maß.
- Multi Faktor Modell: N korrelierte Brownsche Bewegungen $< \mathrm{d}W_i, \mathrm{d}W_j >= \rho_{i,j}$.
- LIBOR L_n Log-Normal Verteilt im $\mathbb{Q}^{P(T_{n+1})}$-Maß ($\rightarrow$ "kompatibel" zu Black Modell)
- Verallgemeinerung des Black-Modells

Choice of Numeraire: $N(t) = P(T_N;t)$ (T_N Bond).

Consider the N-relative Prices of *tradable assets*:

$$\frac{P(T_i)}{P(T_N)} = \prod_{k=i}^{N-1} \underbrace{\frac{P(T_k)}{P(T_{k+1})}}_{=1+\delta_k L_k} = \prod_{k=i}^{N-1} (1+\delta_k L_k) \qquad i = 1,\ldots,N-1.$$

In an arbitrage free model N-relative prices are drift free in:

$$\mathrm{Drift}\left[\frac{P(T_i)}{P(T_N)}\right] = \mathrm{Drift}\left[\prod_{k=i}^{N-1}(1+\delta_k L_k)\right] = 0 \qquad i = 1,\ldots,N-1 \text{ in } Q^{P(T_N)},$$

Product rule for Ito processes:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\left(\prod_{k=i}^{N-1}(1+\delta_k L_k)\right) \\ &= \prod_{k=i}^{N-1}(1+\delta_k L_k) \cdot \sum_{j=i}^{N-1}\left(\frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l \mathrm{d}L_l}{(1+\delta_l L_l)}\right). \end{aligned}$$

LIBOR Market Model: Bestimmung des Drift Terms (2/3)

From

$$\operatorname*{Drift}_{Q^{P(T_N)}} \left[\prod_{k=i}^{N-1} (1 + \delta_k L_k) \right] = 0 \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

we find

$$\sum_{j=i}^{N-1} \operatorname*{Drift}_{Q^{P(T_N)}} \left[\frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l \mathrm{d}L_l}{(1+\delta_l L_l)} \right] = 0 \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

and thus

$$\operatorname*{Drift}_{Q^{P(T_N)}} \left[\frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l \mathrm{d}L_l}{(1+\delta_l L_l)} \right] = 0 \qquad j = 1, \ldots, N-1.$$

LIBOR Market Model: Bestimmung des Drift Terms (3/3)

With

$$\mathrm{d}L_j = L_j \mu_j \mathrm{d}t + L_j \sigma_j \mathrm{d}W_j \quad , \quad \mathrm{d}L_j \cdot \mathrm{d}L_l = L_j L_l \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l} \mathrm{d}t$$

the drift equation

$$\underset{Q^{P(T_N)}}{\mathrm{Drift}} \left[\frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j \mathrm{d}L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l \mathrm{d}L_l}{(1+\delta_l L_l)} \right] = 0 \qquad j = 1, \ldots, N-1$$

becomes

$$\mu_j \frac{\delta_j L_j}{(1+\delta_j L_j)} + \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_j L_j}{(1+\delta_j L_j)} \cdot \frac{\delta_l L_l}{(1+\delta_l L_l)} \cdot \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l} = 0.$$

Thus

$$\mu_j = - \sum_{\substack{l \geq j+1 \\ l \leq N-1}} \frac{\delta_l L_l}{(1+\delta_l L_l)} \cdot \sigma_j(t) \sigma_l(t) \rho_{j,l}$$

Model Framework:

Dynamik in $\mathbb{Q}^{P(T_N)}$:

$$\mathrm{d}L_j = \sum_{j+1 \leq l \leq N-1} \frac{-\delta_l L_j L_l}{(1+\delta_l L_l)} \cdot \sigma_j(t)\sigma_l(t)\rho_{j,l}\,\mathrm{d}t \;+\; L_j\sigma_j(t)\,\mathrm{d}W_j \quad ; \quad L_j(0) = L_{j,0}$$

$$< \mathrm{d}W_i, \mathrm{d}W_j >= \rho_{i,j}$$

Freie Parameter:

$\sigma_1(t), \ldots, \sigma_{N-1}(t)$ – $N-1$ zeitabhängige Volatilitätsfunktionen.

$\rho_{i,j}$ – $\frac{(N-1)\times(N-2)}{2}$ Korrelationen.

Kalibrierungsproblem:

Bestimme ”fit” der Parameter durch aktuelle Marktpreise und/oder historische Daten.

LIBOR Market Model

In der Praxis übliche Modellkalibrierung(en) (und Reduktion der Feiheitsgrade):

- Empirie: Zeithomogene funktionale Form: $\sigma_i(t) = g(T_i - t);\ g(\tau) = (a\tau + b)\,\mathrm{exp}(c\tau + d)$.
- Fit an Caplet Marktpreise: $\int_0^{T_i} \sigma_i^2(t)\mathrm{d}t \; - \; (\sigma_i^{\text{Black, implied}})^2 T_i \; \rightarrow \; \mathrm{min}$.
- Empirie: Exponentiell abfallende Korrelation: $\rho_{i,j} = \mathrm{exp}(-\alpha|i-j|)$.
- Fit an korrelationsempfindliche Produkte (e.g. Swaptions).
- Faktorreduktion: *Principal Component Analysis* der Korrelationsmatrix.

Some extensions of the model:

- Multi-Currency-Model (linked through an FX prozess).
- Smile Modelling: Introducing non-log-normal terminal LIBOR distributions (under corresponding measure):
  - State dependend (local) volatility.
  - Stochastic volatility.
  - Jump processes.

Example: Auto Cap Sensitivities

in Monte Carlo LIBOR Market Model

- Caplet:
  - Single option on forward rate (LIBOR).
  - Payoff profile:

$$\max(L_i(T_i) - S, 0)\Delta T_i, \quad \text{paid in } T_i + \Delta T_i$$

- Cap:
  - Portfolio (series) of n options on forward rates (LIBORs) (Sum of caplets).
- Chooser Cap:
  - Cap where only some (k<n) options may be exercised.
  - Holder may choose upon each exercise date.
  - Value is given by optimal exercise strategy

- Flexi Cap (aka Auto Cap) product definition:
  - Fixing dates: T_1 , T_2 ,..., T_n Payment dates: T_2 , T_3 ,..., T_{n+1}
  - Maximum number of exercises: k
  - Payoff profile:

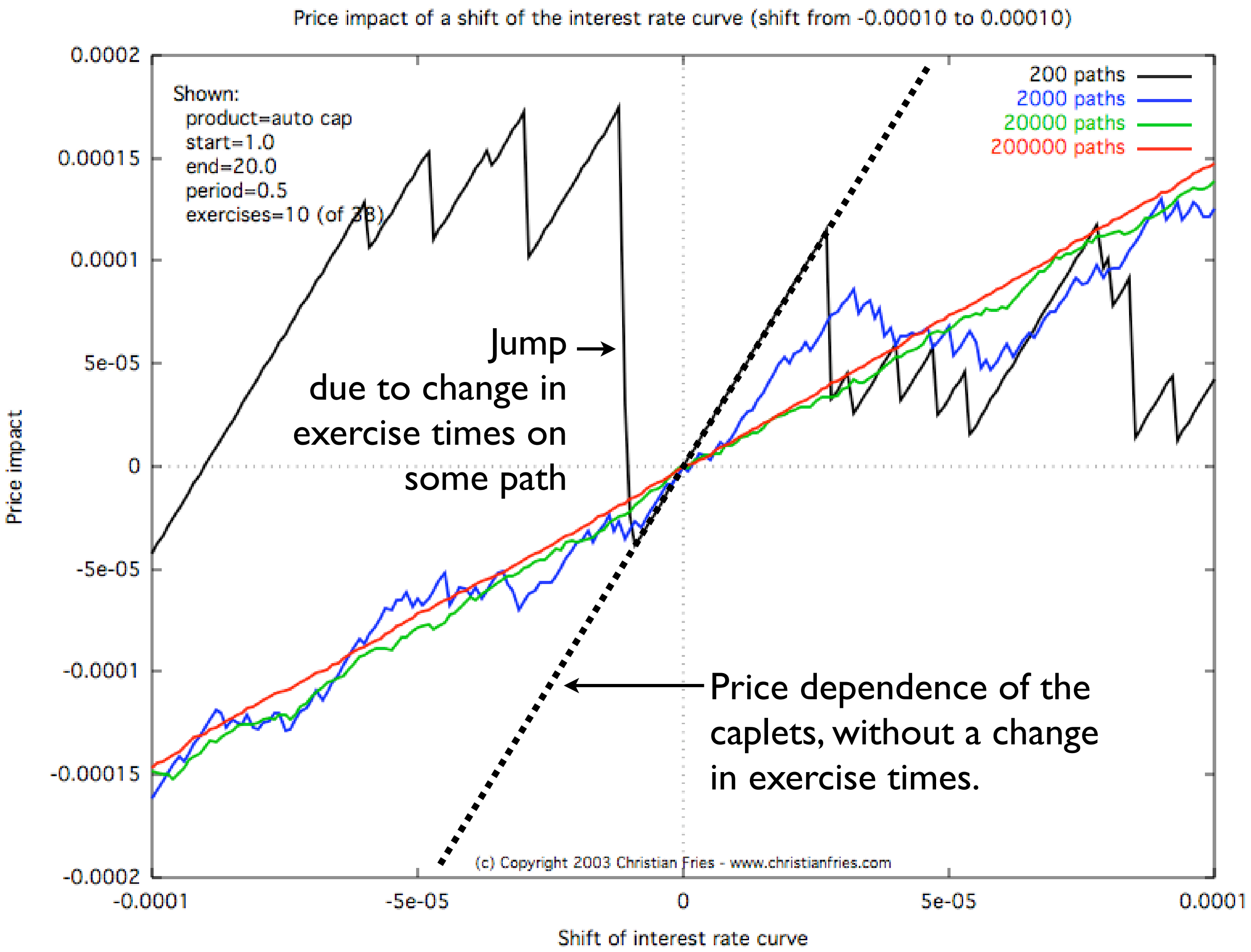
$$\left.\begin{array}{ll} \max(L_i(T_i) - S, 0)\Delta T_i & \text{if } \left|\left\{j \ : \ L_j(T_j) - S > 0 \wedge j < i\right\}\right| < k \\ 0 & \text{else} \end{array}\right\} \text{ paid in } T_{i+1}$$

- Feature: On a (fixed) single path, the product depends discontinuously on the input (i.e. todays) interest rate level.

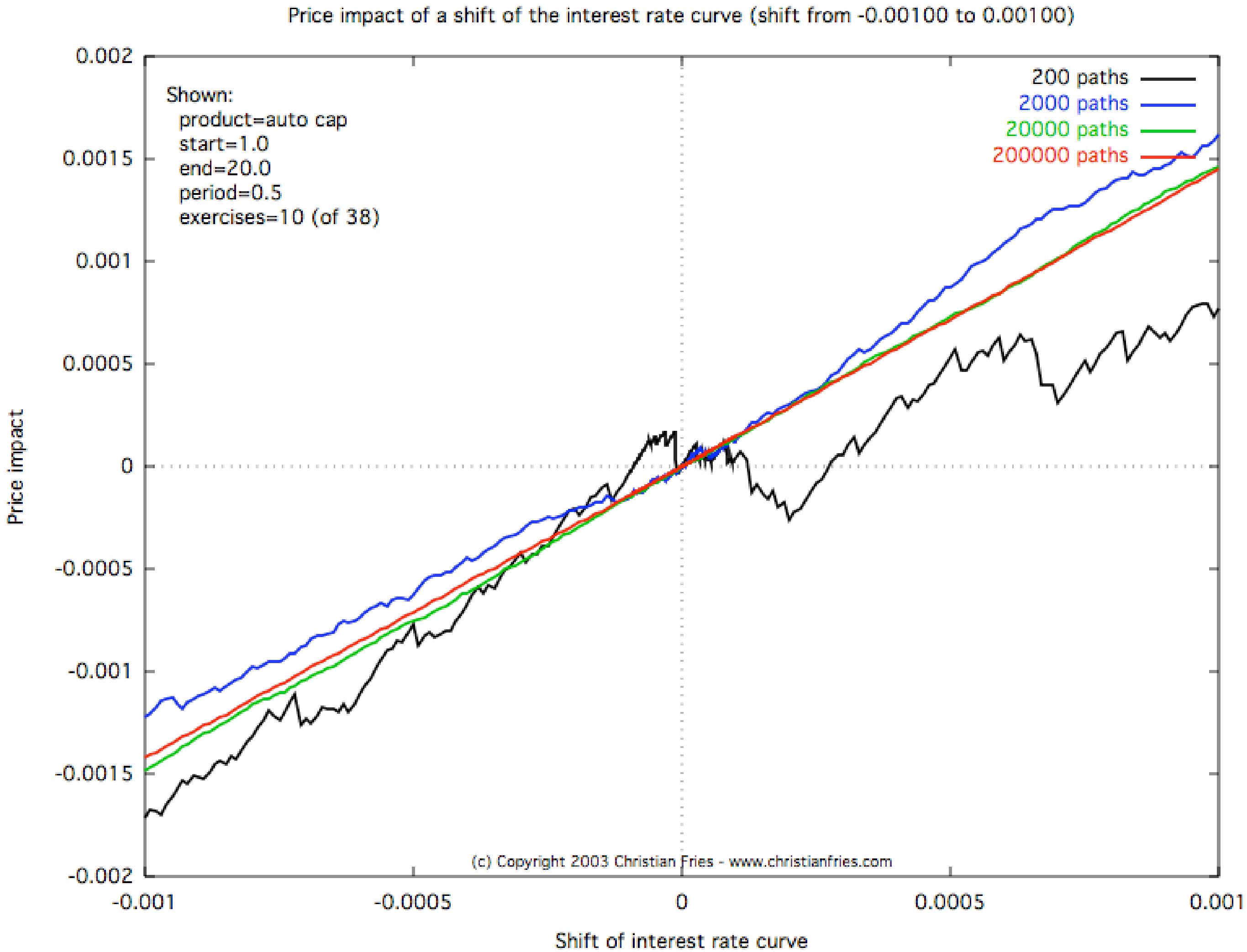
  Note: On a (fixed) single path, Chooser Cap depends continuously on input.

- Effect: For low number of path, numerical evaluation of partial derivatives (greeks) is terrible inaccurate.

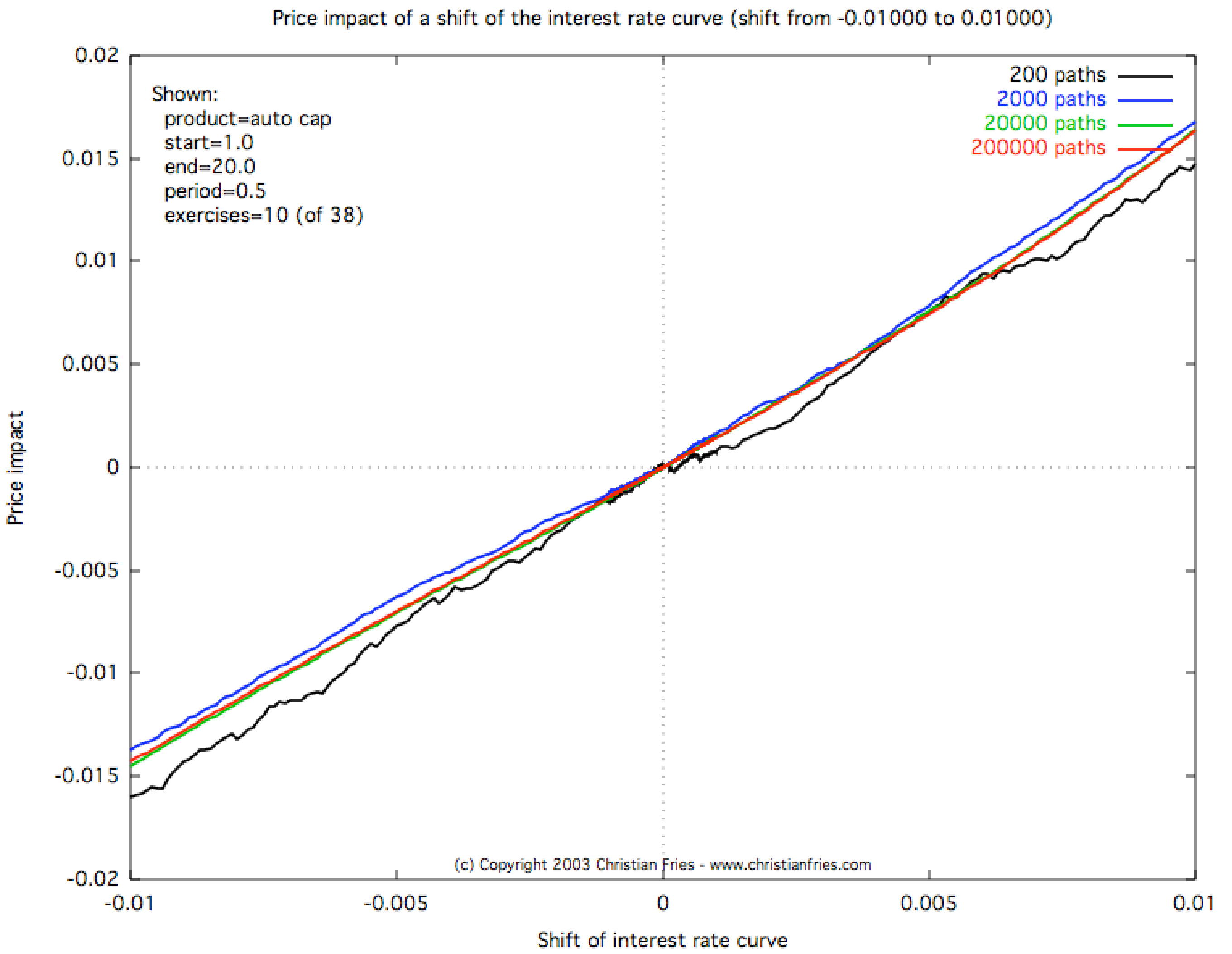
Example: AutoCap Sensitivities: 1 bp shift



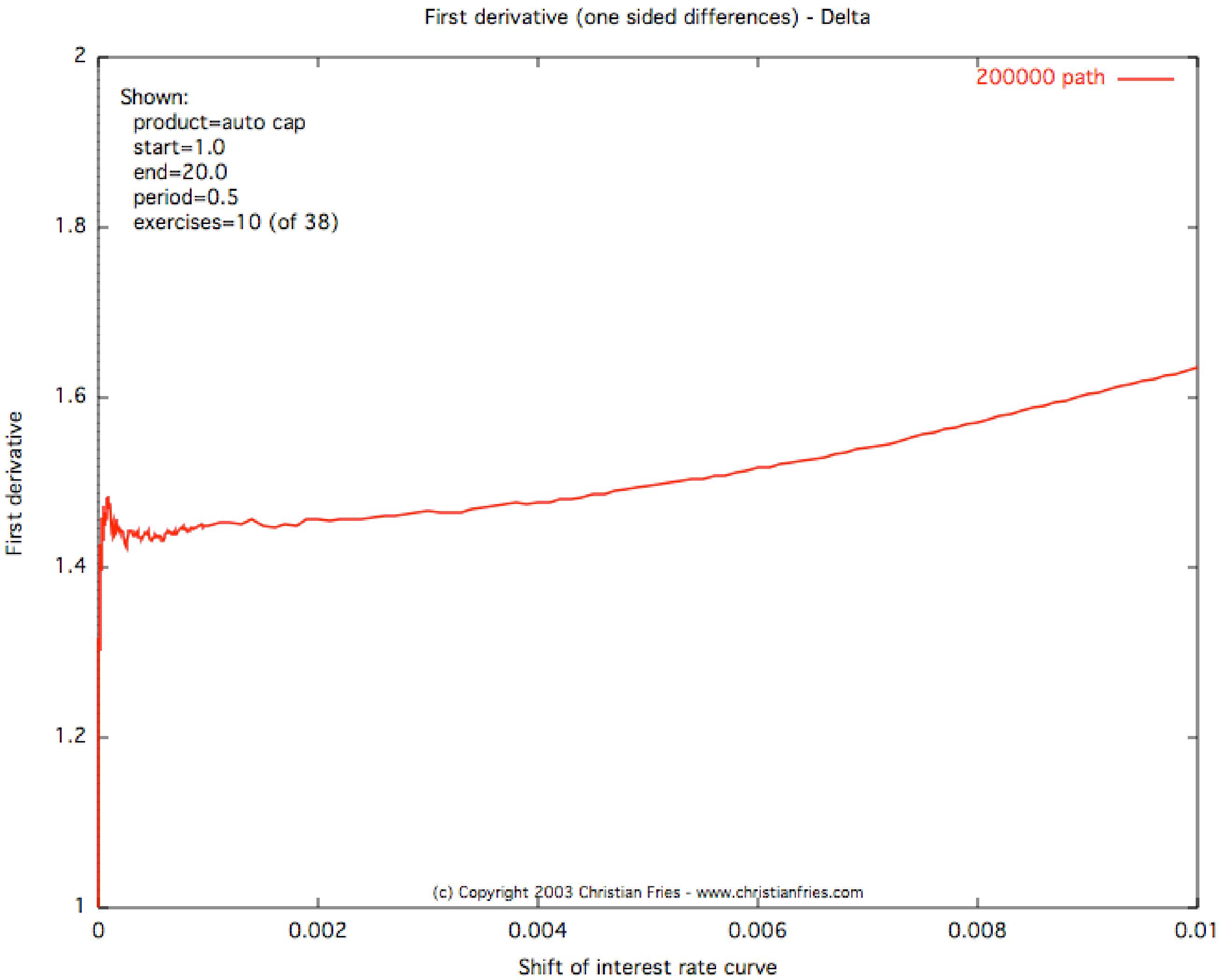
Example: AutoCap Sensitivities: 10 bp shift



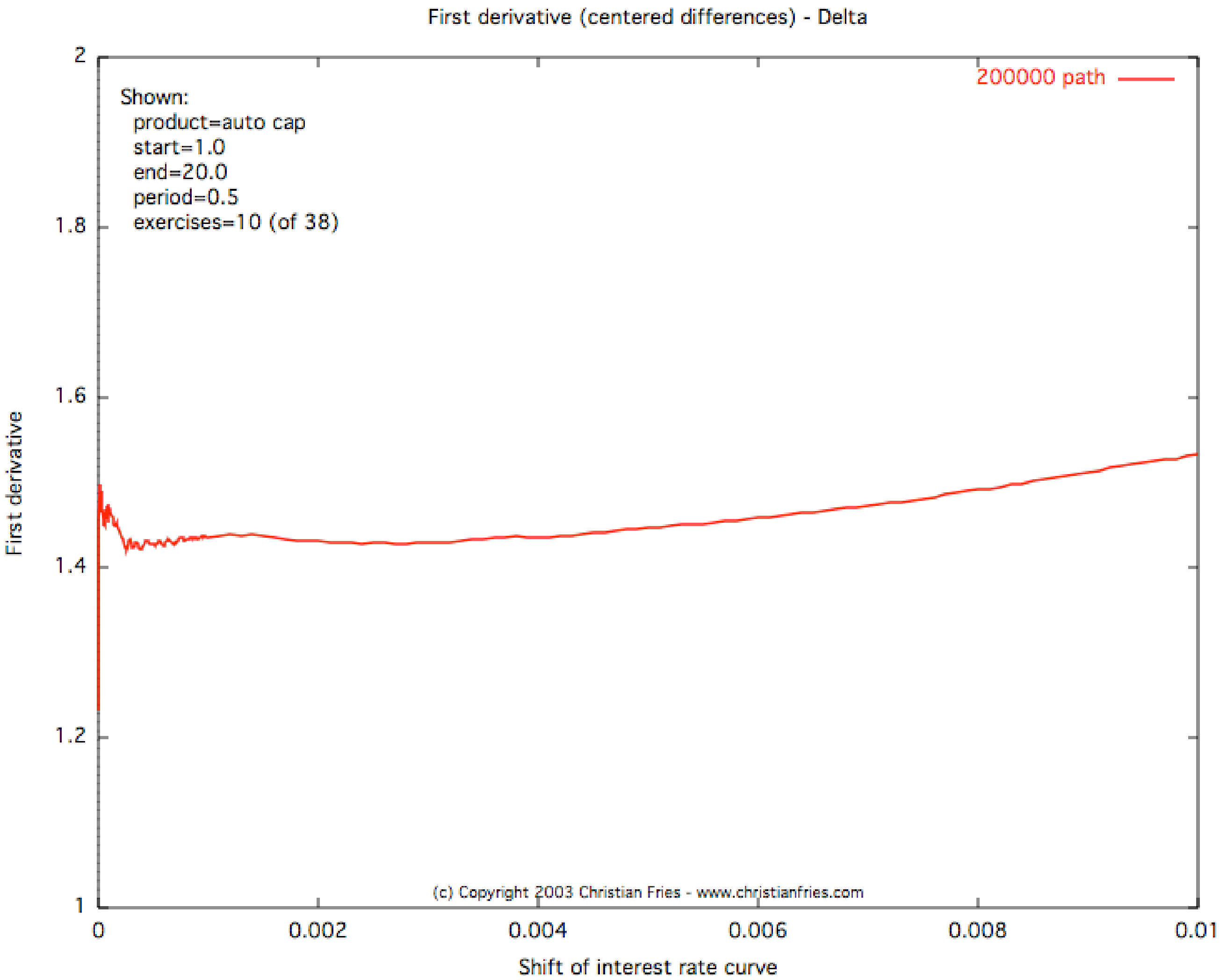
Example: AutoCap Sensitivities: 100 bp shift



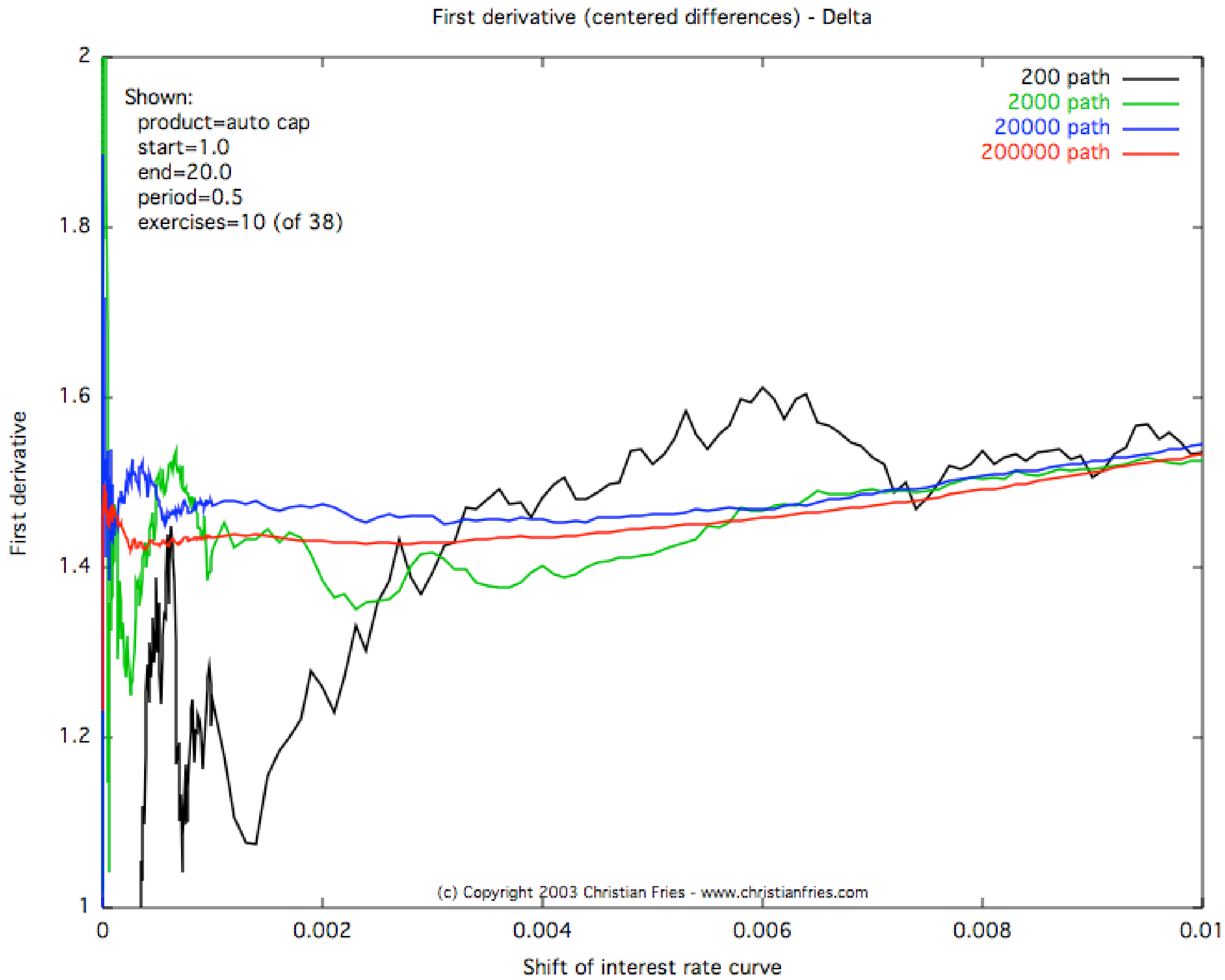
Example: AutoCap Sensitivities: Delta 100 bp



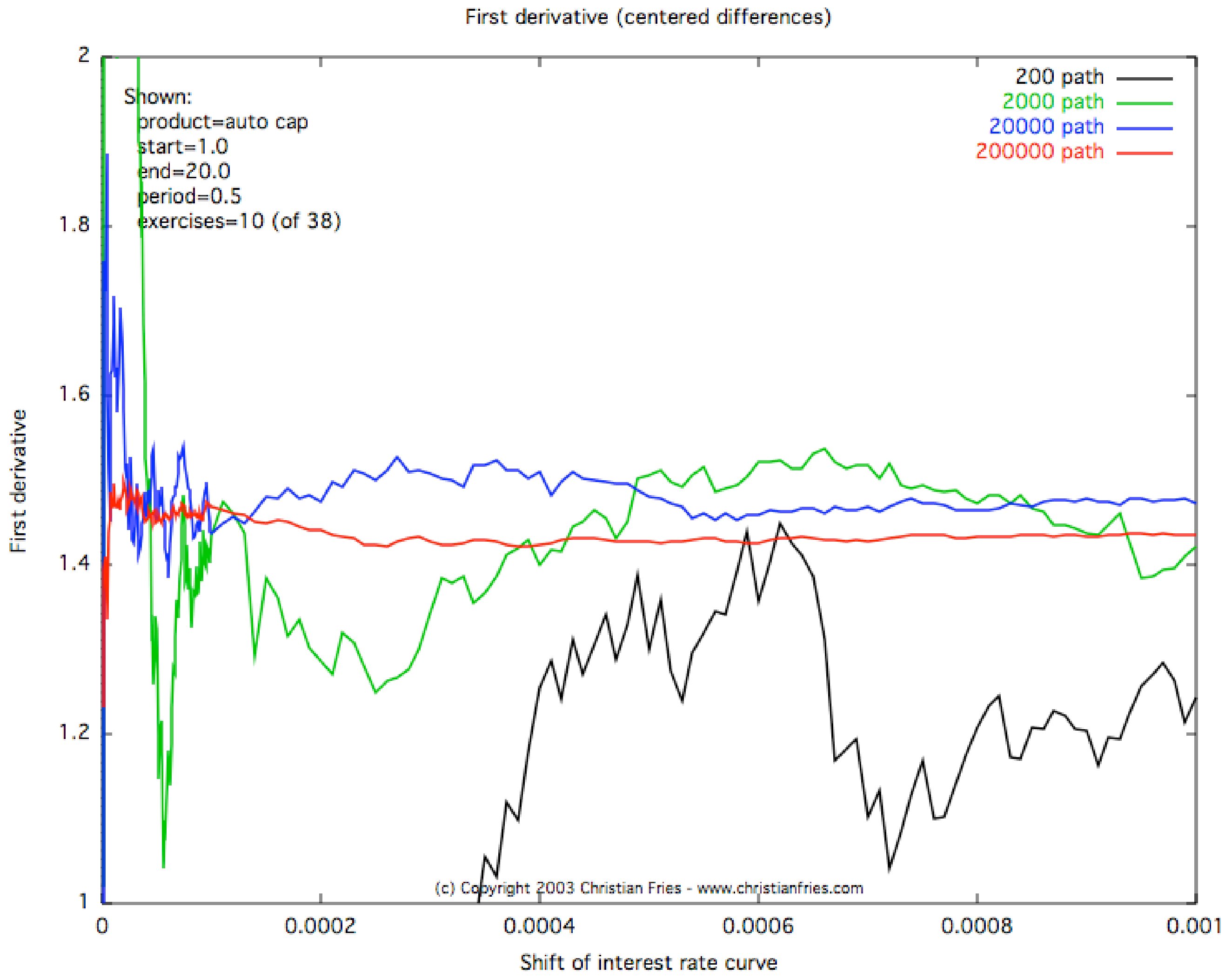
Example: AutoCap Sensitivities: Delta 100 bp



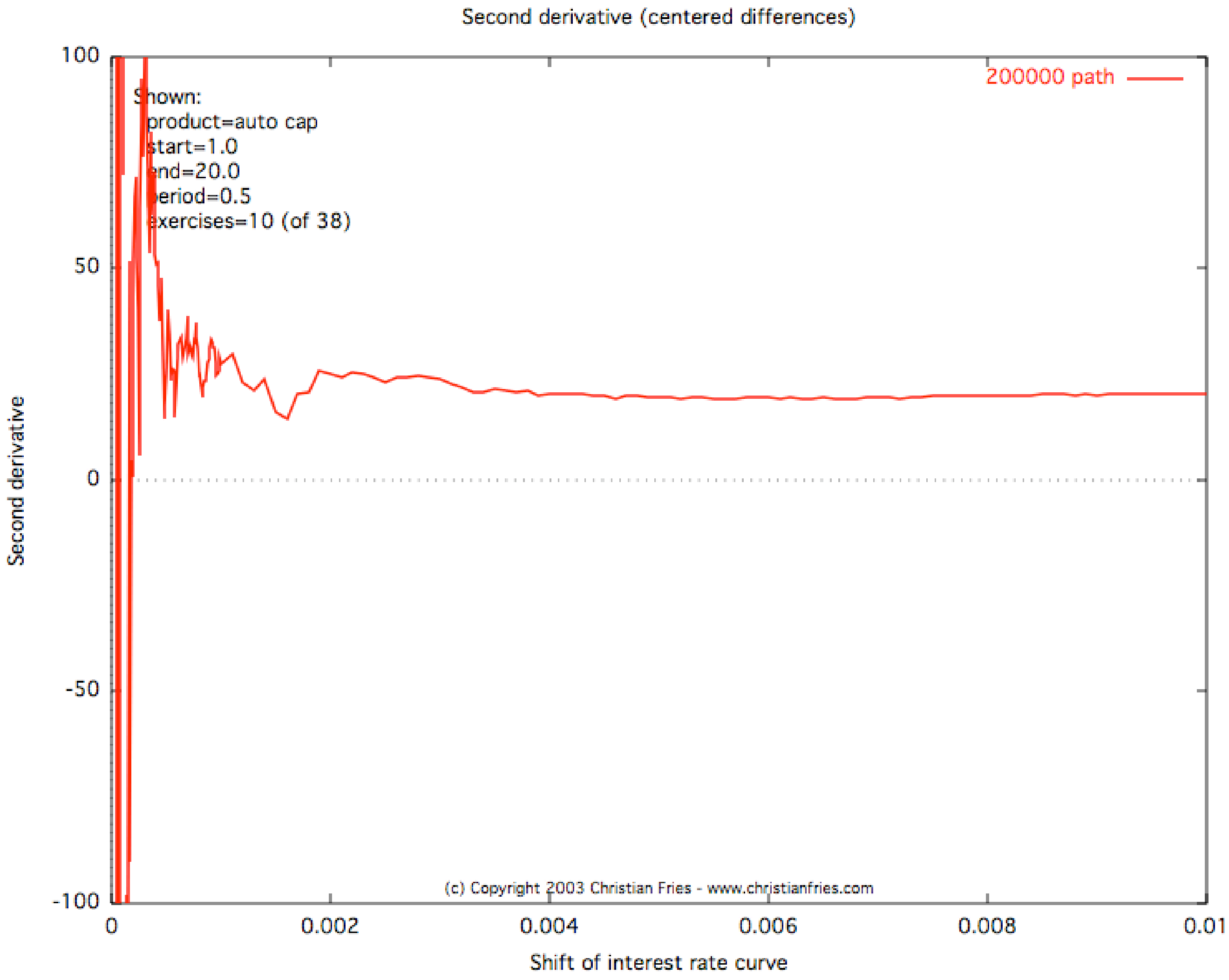
Example: AutoCap Sensitivities: Delta 100 bp



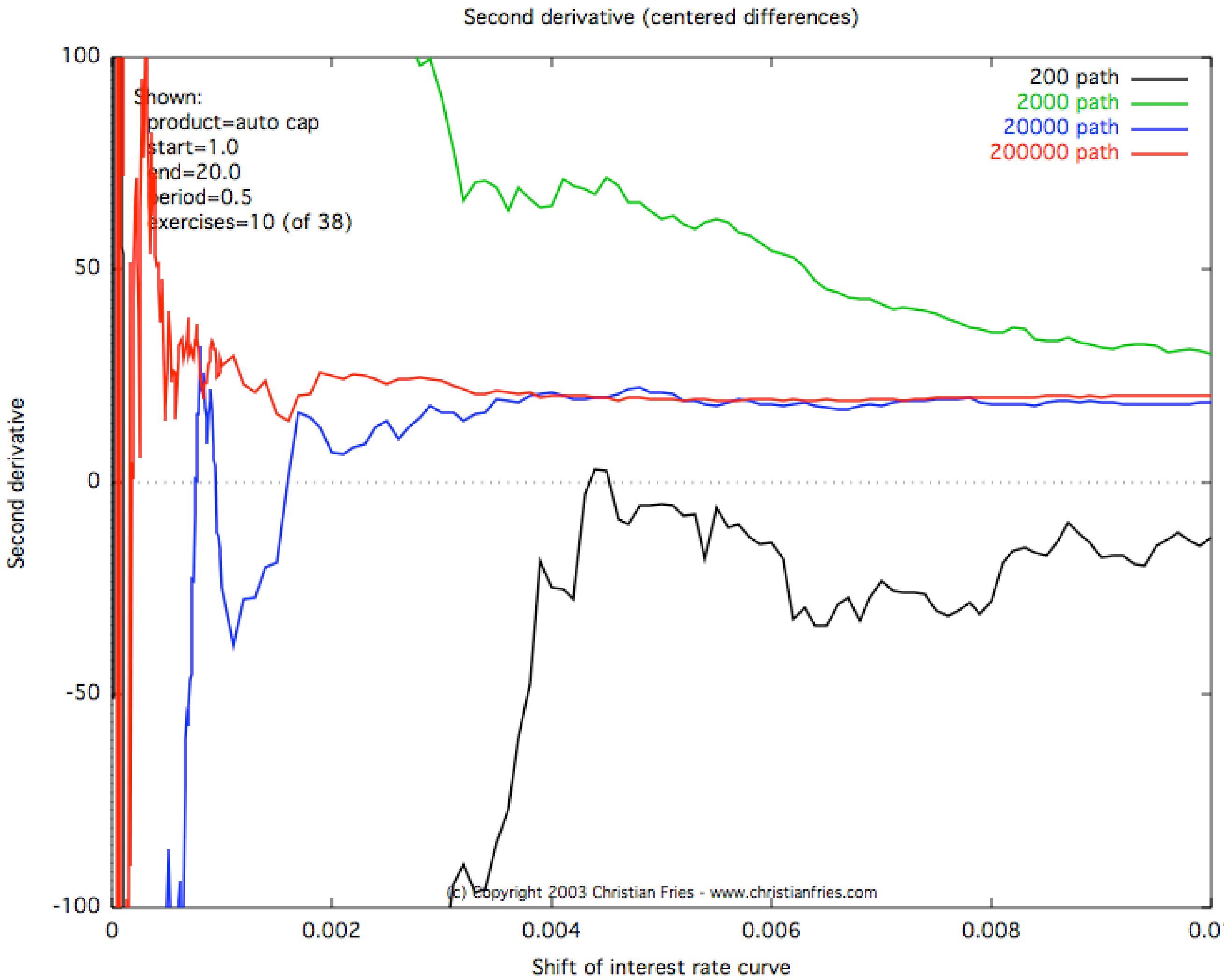
Example: AutoCap Sensitivities: Delta 10 bp



Example: AutoCap Sensitivities: Gamma 100 bp



Example: AutoCap Sensitivities: Gamma 100 bp



Example: AutoCap Sensitivities: Gamma 10 bp